Dozent: Dr. Martin Friesen

Tutor: Dennis Schroers

**Finanzmathematik**
**Wintersemester 2018 / 2019**

---

# Blatt 8

- Abgabe bis **Donnerstag 20.12.2018 um 12:00.**
- Abgabe ins Postfach 89 auf Ebene D13.

**Aufgabe 1.** (4 Punkte)
Geben Sie ein Beispiel für eine nicht-leere, endliche Menge $\Omega$ und zwei Algebren $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ über $\Omega$ derart, dass

$$\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 := \{A \subset \Omega \mid A \in \mathcal{F}_0 \text{ oder } \mathcal{F}_1\}$$

keine Algebra ist. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

**Aufgabe 2.** (4 Punkte)
Sei $\Omega$ eine nicht-leere, endliche Menge sowie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Definiere

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{A \subset \Omega \mid \text{ für jede Algebra } \mathcal{F} \text{ mit } \mathcal{A} \subset \mathcal{F} \text{ gilt } A \in \mathcal{F}\}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen

(a) $\sigma(\mathcal{A})$ ist eine Algebra.

(b) Ist $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine weitere Algebra mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$, so gilt $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{G}$.

**Aufgabe 3.** (4 Punkte)
Sei $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ sowie

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{1,3\} \\ 0, & \omega = 0 \\ -1, & \omega \in \{-1,2\} \end{cases}, \qquad \omega \in \Omega.$$

Bestimmen Sie $\mathcal{F}^X$.

**Aufgabe 4.** (8 Punkte)
Sei $\Omega$ eine nicht-leere, endliche Menge und sei $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Zeigen Sie die folgenden Aussagen

(a) (2 Punkte) $\sigma(X) = \{\{X \in B\} \mid B \subset \mathbb{R}\}$.

(b) (4 Punkte) Ist $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar bezüglich $\sigma(X)$, so gibt es ein $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$Y(\omega) = f(X(\omega)), \qquad \forall \omega \in \Omega. \tag{1}$$

(c) (2 Punkte) Geben Sie ein Beispiel für $\Omega, X, Y$ an derart, dass (1) für kein $f$ erfüllt ist.